Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores

Gebroken functie

1 maximumscore 3

- $f'(x) = \dfrac{(2x-2)(x-3)-\left(x^2-2x\right)\cdot 1}{(x-3)^2}$ (of een gelijkwaardige vorm) 2
- $f'(0) = \frac{2}{3}$ (en dit is de gevraagde richtingscoëfficiënt) 1

Opmerking
Als in het eerste antwoordelement de productregel, quotiëntregel of kettingregel is gebruikt, maar niet correct, mag voor dit antwoordelement maximaal 1 scorepunt worden toegekend op basis van vakspecifieke regel 1.

2 maximumscore 6

- $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-3} = x+1+\dfrac{3}{x-3}$ 1
- De scheve asymptoot heeft vergelijking $y = x+1$ (want $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{x-3} = 0$) 1
- De verticale asymptoot heeft vergelijking $x = 3$ 1
- Dus $S(3,4)$ 1
- Er geldt $g(x) = \dfrac{(x-2)^2-2(x-2)}{x-2-3}+b$ 1
- Uit $g(3) = 4$ volgt ($\frac{1}{2}+b=4$, dus) $b = 3\frac{1}{2}$ 1

of

- $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-3} = x+1+\dfrac{3}{x-3}$ 1
- De scheve asymptoot heeft vergelijking $y = x+1$ (want $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{x-3} = 0$) 1
- De verticale asymptoot heeft vergelijking $x = 3$ 1
- Dus $S(3,4)$ 1
- Omdat $(3, 4)$ op de grafiek van g ligt, moet $(1, 4-b)$ op de grafiek van f liggen 1
- Uit $f(1) = 4-b$ volgt ($\frac{1}{2} = 4-b$, dus) $b = 3\frac{1}{2}$ 1

Sinus en cosinus getransformeerd

3 maximumscore 4

- De vergelijking $2\sin(x-\frac{1}{3}\pi)=1$ moet worden opgelost (met $12\pi \leq x \leq 16\pi$) — 1
- Dit geeft $\sin(x-\frac{1}{3}\pi)=\frac{1}{2}$, dus $x-\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi$ (met k geheel) of $x-\frac{1}{3}\pi=\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi$ (met k geheel) — 1
- $x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$ (met k geheel) of $x=1\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi$ (met k geheel) — 1
- De gevraagde waarden zijn $x=12\frac{1}{2}\pi$, $x=13\frac{1}{6}\pi$, $x=14\frac{1}{2}\pi$ en $x=15\frac{1}{6}\pi$ — 1

4 maximumscore 3

- De vergelijking $2\cos(a-\frac{3}{4}\pi)+2=-2\sin(a-\frac{1}{3}\pi)$ (of een gelijkwaardige vergelijking) moet worden opgelost — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden — 1
- Hieruit volgt het eindantwoord: $a=0,39$ of $a=4,59$ — 1

Opmerking
Voor het eindantwoord '$x=0,39$ of $x=4,59$' geen scorepunten in mindering brengen.

5 maximumscore 4

- Beschrijven hoe de extreme waarden van $h(x)=f(x)+3\cdot g(x)$ berekend kunnen worden — 1
- Dit geeft (het minimum) $-1,948...$ en (het maximum) $13,948...$ — 1
- De amplitude van de grafiek van h is $(\frac{13,948...--1,948...}{2}=)\,7,948...$ — 1
- $p=\frac{7,948...}{2}$, dus het eindantwoord is 3,97 (of: de amplitude van de grafiek van f is 2, dus het eindantwoord is 3,97) — 1

Projectie op een lijn

6 maximumscore 7

- Een vectorvoorstelling van de lijn door B en D is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 1
- Het stelsel $\begin{cases} 2+s=1+3t \\ 2+3s=9-t \end{cases}$ moet worden opgelost 1
- Een exacte berekening waaruit volgt dat $s=2$ (of $t=1$) 1
- Hieruit volgt $D(4,8)$ 1
- $AB^2 = (2--2)^2 + (2--2)^2 = 32$ (of door het gebruik van een $1-1-\sqrt{2}$-driehoek) 1
- $CD^2 = \left(1\frac{3}{5}-4\right)^2 + \left(8\frac{4}{5}-8\right)^2 = \frac{160}{25}$ 1
- Een exacte berekening waaruit volgt dat $k=5$ (dus lijnstuk AB is $\sqrt{5}$ keer zo lang als lijnstuk CD) 1

of

- Een vergelijking van lijn l is $x+3y=28$ 1
- Een vergelijking van de lijn door B en D is $y=3x-4$ 1
- Substitutie geeft $x+3(3x-4)=28$ 1
- Hieruit volgt $x=4$ dus $D(4,8)$ 1
- $AB = \sqrt{(2--2)^2+(2--2)^2} = \sqrt{32}$ (of door het gebruik van een $1-1-\sqrt{2}$-driehoek) 1
- $CD = \sqrt{\left(1\frac{3}{5}-4\right)^2 + \left(8\frac{4}{5}-8\right)^2} = \sqrt{\frac{160}{25}}$ 1
- Een exacte berekening waaruit volgt dat $k=5$ (dus lijnstuk AB is $\sqrt{5}$ keer zo lang als lijnstuk CD) 1

of

- Een vergelijking van de lijn door A en C is $y = 3x + 4$ 1
- Een vergelijking van de lijn door B loodrecht op AC is $y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3}$ 1
- Voor de x-coördinaat van B', met B' de loodrechte projectie van B op AC, geldt $3x + 4 = -\frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3}$ 1
- Dit geeft $x_{B'} = -\frac{2}{5}$ en dan $y_{B'} = 2\frac{4}{5}$ 1
- $BB' = \sqrt{\left(-\frac{2}{5} - 2\right)^2 + \left(2\frac{4}{5} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{160}{25}}$ 1
- $AB = \sqrt{(2 - -2)^2 + (2 - -2)^2} = \sqrt{32}$ (of door het gebruik van een $1 - 1 - \sqrt{2}$-driehoek) 1
- ($BB' = CD$;) een exacte berekening waaruit volgt dat $k = 5$ (dus lijnstuk AB is $\sqrt{5}$ keer zo lang als lijnstuk CD) 1

of

- Een vergelijking van lijn l is $x + 3y = 28$ 1
- Een vergelijking van de lijn door A en B is $y = x$ 1
- Voor de x-coördinaat van S geldt $x + 3x = 28$; dit geeft $x_S = 7$ en dan $y_S = 7$ 1
- Driehoek ASC is gelijkvormig met driehoek BSD (omdat $\angle SDB = \angle SCA$ en $\angle BSD = \angle ASC$) 1
- Een beredenering op basis van deze gelijkvormigheid waaruit blijkt dat $\frac{AB}{CD} = \frac{AS}{CS}$ 1
- $AS = \sqrt{(7 - -2)^2 + (7 - -2)^2} = \sqrt{162}$ (of door het gebruik van een $1 - 1 - \sqrt{2}$-driehoek) en $CS = \sqrt{\left(1\frac{3}{5} - 7\right)^2 + \left(8\frac{4}{5} - 7\right)^2} = \sqrt{\frac{810}{25}}$ 1
- Een exacte berekening waaruit volgt dat $k = 5$ (dus lijnstuk AB is $\sqrt{5}$ keer zo lang als lijnstuk CD) 1

of

Vraag	Antwoord	Scores

- ($BB' = CD$, dus) $\sqrt{k} = \dfrac{AB}{BB'}$, met B' de loodrechte projectie van B op AC — 1
- $\dfrac{1}{\sqrt{k}} = \dfrac{BB'}{AB}$ — 1
- $\dfrac{BB'}{AB} = \cos(\angle ABB')$ — 1
- Een richtingsvector van AB is $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ en van BB' $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ — 1
- Er geldt dus $\cos(\angle ABB') = \dfrac{\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}$ — 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $\dfrac{\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ exact kan worden opgelost — 1
- Dit geeft $k = 5$ — 1

Twee e-machten

7 maximumscore 4

- $f(x) = g(x)$ geeft $3\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x} - 4 = 0$ 1
- Vermenigvuldigen met e^{x} geeft $\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 3 = 0$ 1
- Substitutie van $\mathrm{e}^{x} = p$ geeft $p^2 - 4p + 3 = 0$ 1
- Hieruit volgt $p = 1$ of $p = 3$, dus $x = 0$ of $x = \ln(3)$ 1

8 maximumscore 4

- De integraal $\int_0^{\ln(3)} \left(4 - 3\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}\right)\mathrm{d}x$ moet worden berekend 1
- Een primitieve van $4 - 3\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}$ is $4x + 3\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}$ 1
- Substitutie van $x = \ln(3)$ geeft $4\ln(3) - 2$ 1
- Substitutie van $x = 0$ geeft 2, dus de gevraagde oppervlakte is ($4\ln(3) - 2 - 2 =$) $4\ln(3) - 4$ 1

9 maximumscore 3

- Uit $g(x) = 0$ (of $f(x) = 0$) volgt dat voor de x-coördinaat van de perforatie moet gelden: $x = 0$ (er geldt dan ook $f(0) = 0$ respectievelijk $g(0) = 0$) 1
- $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 1}{3\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)}{3\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)}$ (of $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 1}{3\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)}{3\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)}$) 1
- $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{3} = \frac{1}{3}$ en dit is de y-coördinaat van de perforatie (dus de coördinaten van de perforatie zijn $(0, \frac{1}{3})$) 1

Basketbal

10 maximumscore 5

- Het stelsel $\begin{cases} 6 = v \cdot \cos(60°) \cdot t \\ 3,05 = v \cdot \sin(60°) \cdot t - 4,9t^2 + 2,55 \end{cases}$ moet worden opgelost 1
- $v \cdot t = \dfrac{6}{\cos(60°)}$ $(=12)$ 1
- Invullen geeft $3,05 = 12\sin(60°) - 4,9t^2 + 2,55$ 1
- Algebraïsch oplossen geeft $t = 1,42...$ ($t = -1,42...$ voldoet niet) 1
- $v = \dfrac{6}{\cos(60°) \cdot 1,42...}$ dus de gevraagde snelheid is 8,4 (m/s) 1

of

- Het stelsel $\begin{cases} 6 = v \cdot \cos(60°) \cdot t \\ 3,05 = v \cdot \sin(60°) \cdot t - 4,9t^2 + 2,55 \end{cases}$ moet worden opgelost 1
- $v \cdot t = \dfrac{6}{\cos(60°)}$ $(=12)$ 1
- Dus $t = \frac{12}{v}$; invullen geeft $3,05 = v \cdot \sin(60°) \cdot \frac{12}{v} - 4,9 \cdot \left(\frac{12}{v}\right)^2 + 2,55$ 1
- Herleiden tot $0,5 - 12\sin(60°) = -4,9 \cdot \left(\frac{12}{v}\right)^2$ 1
- Verder algebraïsch oplossen geeft de gevraagde snelheid 8,4 (m/s) ($-8,4$ voldoet niet) 1

11 **maximumscore 5**

- Het tijdstip waarop de bal door de basket gaat, is
  $t = \dfrac{6}{8\cos(50°)} = 1{,}166...$ 1
- $x'(t) = 8\cos(50°)$ 1
- $y'(t) = 8\sin(50°) - 9{,}8t$ 1
- $x'(1{,}166...) = 5{,}14...$ en $y'(1{,}166...) = -5{,}30...$ 1
- Uit $\tan(\beta) = \dfrac{-5{,}30...}{5{,}14...}$ volgt dat de gevraagde hoek $(-)46°$ is 1

of

- Voor het tijdstip waarop de bal door de basket gaat, geldt
  $3{,}05 = 8\sin(50°)\cdot t - 4{,}9t^2 + 2{,}55$; een algebraïsche berekening waaruit volgt $t = 1{,}162...$ ($t = 0{,}08...$ voldoet niet) 1
- $x'(t) = 8\cos(50°)$ 1
- $y'(t) = 8\sin(50°) - 9{,}8t$ 1
- $x'(1{,}162...) = 5{,}14...$ en $y'(1{,}162...) = -5{,}26...$ 1
- Uit $\tan(\beta) = \dfrac{-5{,}26...}{5{,}14...}$ volgt dat de gevraagde hoek $(-)46°$ is 1

of

- Er geldt $t = \dfrac{x}{8\cos(50°)}$ 1
- Voor punten op de baan geldt
  $y = 8\sin(50°)\cdot\dfrac{x}{8\cos(50°)} - 4{,}9\cdot\left(\dfrac{x}{8\cos(50°)}\right)^2 + 2{,}55$ 1
- $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{8\sin(50°)}{8\cos(50°)} - 9{,}8\cdot\dfrac{x}{(8\cos(50°))^2}$ 1
- Dus $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=6} = \dfrac{8\sin(50°)}{8\cos(50°)} - 9{,}8\cdot\dfrac{6}{(8\cos(50°))^2}$ 1
- Uit $\tan(\beta) = \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=6}$ volgt dat de gevraagde hoek $(-)46°$ is 1

Absolute waarde en wortelfunctie

12 maximumscore 5

- ($x_T < 0$, dus bekeken moet worden) $f(x) = -3 - x\sqrt{x+3}$ 1
- $f'(x) = -\sqrt{x+3} - x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$ 2
- $f'(x) = 0$ geeft $-(x+3) - \frac{1}{2}x = 0$ (of een gelijkwaardige lineaire vergelijking) 1
- Hieruit volgt $x = -2$ (en dit is de x-coördinaat van T) 1

Opmerking
Als in het tweede antwoordelement de productregel, quotiëntregel of kettingregel is gebruikt, maar niet correct, mag voor dit antwoordelement maximaal 1 scorepunt worden toegekend op basis van vakspecifieke regel 1.

13 maximumscore 5

- De lijn door O en P heeft vergelijking $y = x$ 1
- ($x_S > 0$, dus) de vergelijking $-3 + x\sqrt{x+3} = x$ moet worden opgelost 1
- Dit geeft $\left(x\sqrt{x+3}\right)^2 = (x+3)^2$, dus $x^2(x+3) = (x+3)^2$ 1
- Dus $x^2 = x+3$ ($x = -3$ geeft P), dus $x^2 - x - 3 = 0$ 1
- $x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ (of een gelijkwaardige vorm) ($x = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ voldoet niet) 1

14 maximumscore 5

- Het inzicht dat de grafiek van $f(x)+3$ gewenteld moet worden om de x-as — 1
- De inhoud van het omwentelingslichaam kan berekend worden met $\pi\int_{-3}^{0}\left(|x|\sqrt{x+3}\right)^2\,\mathrm{d}x$ — 1
- Dat is gelijk aan $\pi\int_{-3}^{0}\left(x^3+3x^2\right)\mathrm{d}x$ — 1
- Een primitieve van x^3+3x^2 is $\frac{1}{4}x^4+x^3$ — 1
- Invullen van de grenzen geeft: de inhoud is $6\frac{3}{4}\pi$ — 1

Boogbrug

15 maximumscore 5

- $f'(x) = 0{,}00016x^3 - 0{,}024x$ 1
- $f''(x) = 0{,}00048x^2 - 0{,}024$ 1
- $f''(x) = 0$ geeft $0{,}00048x^2 = 0{,}024$, dus $x^2 = 50$, dus $x = -7{,}07...$ of $x = 7{,}07...$ (of $x = \pm\sqrt{50}$) 1
- $f'(-7{,}07...) = 0{,}113...$ en $f'(7{,}07...) = -0{,}113...$ 1
- $0{,}113... < 0{,}12$, dus aan de eis is voldaan 1

Opmerkingen

– *Als de kandidaat vermeldt dat de grafiek symmetrisch is ten opzichte van de y-as, dan is het voldoende dat één oplossing van $f''(x) = 0$ wordt genoemd (en daarmee verder wordt gerekend).*

– *Als alleen voor $x = \pm 10$ de waarden van $f'(x)$ worden vergeleken met 0,12, voor deze vraag maximaal 2 scorepunten toekennen.*

16 maximumscore 6

- De horizontale afstand tussen P en M is $p - 5$ 1
- De verticale afstand is $f(p)$ ($= 0{,}00004p^4 - 0{,}012p^2 + 2{,}3$) 1
- Dus $MP = \sqrt{(p-5)^2 + (f(p))^2}$ 1
- Beschrijven hoe het minimum van deze uitdrukking kan worden bepaald 1
- Dit minimum is $2{,}014...$ 1
- De maximale straal is dus $1{,}71$ (m) 1

of

- De horizontale afstand tussen P en M is $p - 5$ 1
- De verticale afstand is $f(p)$ ($= 0{,}00004p^4 - 0{,}012p^2 + 2{,}3$) 1
- De richtingscoëfficiënt van MP is dus $\frac{f(p)}{p-5}$, dus er moet gelden $\frac{f(p)}{p-5} \cdot f'(p) = -1$ (want de raaklijn aan de grafiek van f in P moet loodrecht op MP staan) 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- Dit geeft $p = 5{,}205...$ met $f(p) = 2{,}004...$; hieruit volgt $MP = \sqrt{(5{,}205... - 5)^2 + 2{,}004...^2} = 2{,}014...$ 1
- De maximale straal is dus $1{,}71$ (m) 1

Rechthoek met drie cirkels

17 **maximumscore 5**

- $MF = r$ en $MS = 2r$ (want MN gaat door de punten waar de cirkels elkaar raken) 1
- (De stelling van Pythagoras in driehoek FMS of het gebruik van een $1-\sqrt{3}-2$-driehoek geeft) $FS = \sqrt{3} \cdot r$ 1
- De oppervlakte van $MFNG$ is ($2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2\sqrt{3} \cdot r =$) $2\sqrt{3} \cdot r^2$ 1
- De oppervlakte van één cirkel is πr^2 1
- $2\sqrt{3} \cdot r^2 > \pi r^2$ (of $2\sqrt{3} > \pi$), dus de oppervlakte van vierhoek $MFNG$ is groter dan de oppervlakte van een van de cirkels 1

Opmerking
Als gewerkt wordt met één gekozen waarde van r, en uitgelegd wordt waarom dit geen invloed heeft op de juistheid van de conclusie, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen. Als deze uitleg ontbreekt, voor deze vraag maximaal 3 scorepunten toekennen.

Bronvermeldingen

Gebroken functie

figuur	Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling, 2023

Sinus en cosinus getransformeerd

alle figuren	Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling, 2023

Projectie op een lijn

figuur	Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling, 2023

Twee e-machten

figuur	Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling, 2023

Basketbal

afbeelding	Shutterstock 1938831442/ alphaspirit.it
alle figuren	Shutterstock 748412083 Bokica / Shutterstock 6842905, maker: Petar Milevski

Absolute waarde en wortelfunctie

alle figuren	Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling, 2023

Boogbrug

foto	Shutterstock 413041966 / Marina Datsenko
alle figuren	Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling, 2023

Rechthoek met drie cirkels

figuur	Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling, 2023